Correction CC2

Les exercices 1,2 et 3 ainsi que leurs corrections sont tirés du site Bibmath : lien

QCM :
1. Vrai. C'est une conséquence du critère d'Alembert.
2. Faux. Il est égal à $\frac{1}{\sqrt{l}}$.
3. Vrai. C'est une conséquence direct du théorème d'intégration des séries entières.

Exercice 1 :
1. La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\pi^n}$ convient.
2. Si $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $b_n = 1$, les deux séries ont même rayon de convergence (égal à 1), et pourtant $a_n = o(b_n)$.
3. C'est le même ! on a $|a_n\rho^n| = |(-1)^n a_n \rho^n|$ pour tout $\rho \geq 0$, et donc, par définition du rayon de convergence, les deux séries ont même rayon de convergence.

Exercice 2 :
Soit $0 \leq r < \rho_1\rho_2$. Alors il existe $r_1 < \rho_1$ et $r_2 < \rho_2$ tel que $r = r_1 r_2$. Les suites $(a_n r_1^n)$ et $(b_n r_2^n)$ sont bornées. Il en est de même de la suite $(a_n b_n r_1^n r_2^n)$, c'est-à-dire de la suite ($a_n b_n r^n$). Comme ceci est vrai pour tout $r < \rho_1\rho_2$, le rayon de convergence recherché est au moins égal à $\rho_1\rho_2$. On n'a pas toujours égalité. En effet, si la première série est $\sum_n z^{2n}$ et la deuxième série est $\sum_n z^{2n+1}$, alors leur produit de Hadamard est la série nulle, qui est de rayon de convergence égal à $+\infty$, alors que dans ce cas $\rho_1\rho_2 = 1 \times 1 = 1$.

Exercice 3 :
1. Posons $u_n = \frac{x^{2n}}{2n+1}$. On a $u_{n+1}/u_n \to x^2$. Ainsi, si $|x| < 1$, la série est convergente et si $|x| > 1$, la série est divergent. Autrement dit, on a prouvé que le rayon de convergence est égal à 1. Posons, pour $x \in]-1,1[$, $S(x)$ la somme de la série entière. Alors S est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$(xS)'(x) = \sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$$

Par intégration, on en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$xS(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

et donc, pour $x \neq 0$,

$$S(x) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

2. Il y avait une typo dans l'énoncé. Il s'agissait de base de l'étude de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n .$$

Le barème avait été corrigé en fonction. Cela n'impactait d'ailleurs pas le rayon de convergence.
Voici la correction avec la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$.
2. Posons $u_n = \frac{n^3}{n!}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)^3}{n^3} \to 0$$

Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série étudiée est égal à $+\infty$. Pour la sommer, on va exprimer n^3 en fonction de $n(n-1)(n-2), n(n-1)$ et n pour se ramener à des séries dérivées. On a en effet :

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$$

Utilisant que la dérivée de $\exp(x)$ est égale à $\exp(x)$, on trouve

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^n = x^3\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^{n-3} = x^3\exp(x).$$

De même, on a

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)}{n!}x^n = x^2\exp(x) \text{ et } \sum_{n\geq 0}\frac{n}{n!}x^n = x\exp(x)$$

On conclut que

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}x^n = \left(x^3+3x^2+x\right)\exp(x).$$

3. 3. Il est clair, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence est égal à 1 . De plus, si on pose $f(x)=\frac{1}{1+x}$, on a pour tout $x\in]-1,1[$,

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$$

En dérivant, il vient

$$-\frac{x}{(1+x)^2} = xf'(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n n x^n,$$

soit finalement

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1} = x\times\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\ .$$