Sorbonne Université
LU2MA260 - Séries numériques et séries de fonctions
Controle Continu 3
Durée : 1h00

Instructions : Ecrivez votre nom, prénom et numéro d'étudiant. La qualité de la rédaction sera largement prise en compte. **Hormis les questions de cours, toutes les réponses doivent être justifiées** . Ecrire au crayon à papier est autorisé.
Le barème est à titre indicatif.

Question de cours [3 points]

Dans tous l'exercice, sauf mention contraire, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, intégrable sur $[0, 2\pi]$.

1. Donne l'expression générale de la série trigonométrique (aussi appelée série de Fourier) de f, par ses coefficients trigonometriques, puis par ses coefficients exponentiels.
2. Rappeler les formules pour calculer les coefficients de Fourier trigonometriques et exponentiels de f.
3. Rappeler le lien entre coefficients trigonometriques et exponentiels d'une série de Fourier.
4. Rappeler le théorème de Parseval.
5. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, intégrable sur $[0, 2\pi]$ et (c_n, a_n, b_n) ses coefficients de Fourier ($(c_n)_n$ sont les coefficients exponentiels).
a) Que des dire des coefficients quand f est pair ?
b) Que dire des coefficents quand f est impair ?
c) Que dire des coefficients quand f est à valeur réele ?

Exercice 1 [3 points]

Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = x^2$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$. En déduire la somme des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2 [5 points]

1. Donner la décomposition en série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \cos(5x)$.
2. En utilisant le théorème de Parseval, prouver que deux fonctions continues 2π périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier sont égales.
3. Soit f une fonction continue 2π-périodique. Montrer que $(c_n(f))$ tend vers 0 lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$.
4. Soit f la fonction "créneau" définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$, $f(x) = -1$ si $x \in [-\pi, 0[$, et prolongée par 2π-périodicité. Quelle est la régularité de cette fonction ? Que dire de la série de Fourier de f en 0 ? Peut-on avoir convergence normale de la série de Fourier de f vers f sur $[-\pi, \pi]$?
5. Soit f la fonction paire 2π-périodique définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, \pi]$.f est-elle C^1 par morceaux ?