Correction CC3

Les deux exercices et leurs corrections sont tirés du site Bibmath : lien

Exercice 1 :

1. On peut bien sûr se lancer dans des calculs très complexes.... On peut ! Mais quand même, la décomposition en série de Fourier consiste à représenter une fonction périodique comme somme des fonctions périodiques les plus élémentaires possibles (à savoir les sinus et les cosinus). Alors, bien entendu, la décomposition en série de Fourier de $\cos(5x)$ est . . . $\cos(5x)$! A vous de voir si vous jugez utile de justifier cela ! Cela dit, c'est une bonne occasion de rappeler que

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)dx = 0 \text{ si } p \neq q$$

et

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(qx)dx = 0 \text{ pour tous } p, q.$$

2. Posons $h = f - g$. Alors $c_n(h) = c_n(f) - c_n(g) = 0$. De plus, h est continue et vérifie donc les conclusions du théorème de Parseval, à savoir

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(h)|^2 = 0.$$

Puisque $t \mapsto |h(t)|^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$, on en déduit que $h = 0$ sur $[-\pi, \pi]$. Par 2π-périodicité, $f = g$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. D'après le théorème de Parseval, on sait que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z})} |c_{\boldsymbol{n}}(f)|^2$ est donc convergente. Son terme général tend vers 0 , et on conclut que $(c_n(f))$ converge bien vers 0 lorsque $|\boldsymbol{n}|$ tend vers $+\infty$.

4. La fonction f est de classe C^1 par morceaux. En effet, sur l'intervalle $[0, \pi[$, elle est la restriction à $[0, \pi\,[$ d'une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$ (la fonction identiquement égale à 1), et sur $[-\pi, 0\,[$, elle est la restriction de d'une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$ (la fonction identiquement égale à -1). Le théorème de convergence simple peut donc s'appliquer. En particulier, en 0 , la série de Fourier de f converge vers

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = 0.$$

La série de Fourier de f ne peut pas converger normalement vers f. En effet, si on avait convergence normale, chaque somme partielle étant continue, la limite serait elle aussi continue. Et f n'est pas continue en 0 .

5. f n'est pas C^1 par morceaux : en effet, sinon, on pourrait définir sur $[0, \pi]$ une fonction de classe C^1 qui coïncide avec f sur $]0, \pi]$. Ce n'est pas possible car $f'(x)$ tend vers $+\infty$ en 0.

Exercice 2 :

La fonction f est paire, ses coefficients en sinus sont nuls, et on a :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx$$

La calcul de a_n se fait par une double intégration par parties, et on trouve :

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

Maintenant, f est continue et C^1 par morceaux : cette fonction est somme de sa série de Fourier pour tout réel, et on a donc, pour tout $\boldsymbol{x}$ dans $[-\pi, \pi]$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Si l'on fait $\boldsymbol{x} = \pi$, on obtient :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

On obtient exactement :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Si l'on fait $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, on obtient cette fois :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Pour calculer la dernière somme demandée, il faut pouvoir mettre les coefficients au carré, et c'est ce que l'on obtient dans l'égalité de Parseval, que l'on peut appliquer ici puisque f est continue :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{16}{n^4}$$

Ceci donne :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) = \frac{\pi^4}{90}$$