Pour étudier les convergences d'une série d'applications

Soit la série suivante d'applications :

$$\sum_n (f_n : X \longrightarrow \mathbb{K})$$

Rappels :

$$\text{C.N.} \Longrightarrow \text{C.U.} \Longrightarrow \text{C.S.}$$
$$\text{C.N.} \Longrightarrow \text{C.A.} \Longrightarrow \text{C.S.}$$

Suivre le plan de travail suivant :

1. **Convergence simple (C.S.) :**
   Est-ce que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur X ?
   - **Non :** Remplacer X par la partie de X formée des $x \in X$ tels que la série numérique $\sum_n f_n(x)$ converge, puis passer à l'étape suivante.
   - **Oui :** Passer à l'étape suivante.
2. **Convergence normale (C.N.) :**
   Est-ce que la série $\sum_n f_n$ converge normalement sur X ?
   - **Oui :** D'après le cours, $\sum_n f_n$ converge uniformément, absolument, et simplement sur X. L'étude est terminée.
   - **Non :** Rechercher si $\sum_n f_n$ converge normalement sur des sous-ensembles convenables de X (optionnel). Passer à l'étape suivante.
3. **Critères de convergence uniforme (C.U.) :**
   (a) **Vérification 1 :**
   Est-ce que $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$?
   - **Non :** D'après le cours, $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur X.
   - **Oui :** Passer à l'étape suivante.

   (b) **Vérification 2 :**
   Est-ce que $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$?
   - **Oui :** La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur X.
   - **Non :** La série $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur X.

Exemple

Considérons la série d'applications suivante sur $X = [0, 1]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{avec} \quad f_n(x) = x^n.$$

La limite de cette suite d'applications est :

$$f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Convergence simple (C.S.)
Pour chaque $x \in X$, la série numérique associée est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Cette série est une série géométrique avec raison x. Elle converge pour $x \in [0, 1)$, et sa somme est donnée par :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad \text{pour} \quad x \in [0, 1).$$

Cependant, pour $x = 1$, la série diverge (car elle devient la somme infinie de 1).
Ainsi, la série converge simplement pour $x \in [0, 1)$, mais diverge pour $x = 1$. On va donc faire l'étude sur $[0, 1)$ (1 non inclu).

2. Convergence normale (C.N.)

Pour étudier la convergence normale, il faut vérifier si :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_\infty(x)| < \infty.$$

On a $\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f_\infty(x)|$, ainsi la série des majorants est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

qui est manifestement divergente. Ainsi, la série ne converge pas normalement sur $[0, 1]$.

3. Convergence uniforme (C.U.)

Pour vérifier la convergence uniforme, il faut que :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f_\infty(x)| = 0.$$

Nous avons :

$$\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f_\infty(x)| = 1$$

Donc, comme cette borne ne tend pas vers zéro, la série ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.
Cependant, si l'on considère l'intervalle $[0, a]$ avec $a < 1$, alors :

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f_\infty(x)| = a^n \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Dans ce cas, la série converge uniformément sur tout sous-intervalle $[0, a]$ avec $a < 1$.

Conclusion

Dans cet exemple :
- La série converge simplement sur $[0, 1)$.
- La série ne converge pas normalement sur $[0, 1]$.
- La série converge uniformément sur tout sous-intervalle $[0, a]$ avec $a < 1$, mais pas sur $[0, 1]$.